(34). Рассчитать связанные с наличием электрического поля вклады в свободную энергию и термодинамические характеристики единицы объёма изотропного диэлектрика, считая диэлектрическую проницаемость вещества $\varepsilon(\theta)$ заданной.

О-па, а тут у нас уже не магнитное поле, а электрическое.

Из курса электрода известно:

$$F = \frac{ED}{8\pi}$$

или, подставив диэлектрическую проницаемость:

$$F = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$$

Отлично, объёмную плотность свободной энергии Гельмгольца мы нашли.

Что нам ещё надо? Т.н. термодинамические характеристики, которые от нас хотят в условии – это две тёплоёмкости. Для газа это были C_p и C_V, для магнетиков C_M и C_H, а здесь C_D и C_E.

Как будем считать теплоёмкость? Мы привыкли из школы по формуле

$C_Щ = \left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_Щ$

где Щ – какая-то физ.величина.

На 4 курсе всё иначе. Вот что пишет Савченко в лекциях:

Рассмотрим ещё несколько формул. По определению теплоемкость

$$C_{VaN} = \theta\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_{VaN}$$

a и N (число частиц) априори постоянны, так что она на самом деле указывает

$C_V = \theta\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_V$

Т.е. нам нужно найти:

$C_D = \theta\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_D$

$C_E = \theta\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)_E$

Ага, т.е. нам нужна энтропия. Как бы нам её найти? Давайте вспомним физхим:

dU = TdS – pdV

dH = TdS + Vdp

dF = -SdT – pdV

dG = -SdT + Vdp

Проделаем замены:

dU = θdS – EdP

dH = θdS + PdE

dF = -Sdθ – EdP

dG = -Sdθ + PdE

И отсюда видно, например, что энтропию можно выразить вот такую частную производную:

$$S = \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)_P = \left(\frac{\partial \frac{\varepsilon(\theta)E^2}{8\pi\varepsilon}}{\partial \theta}\right)_P = \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial \varepsilon(\theta)}{\partial \theta}\right)_P$$

По условию, ε зависит только от θ (т.е. поляризация P линейна исходному полю D – это верно для малых полей), поэтому частность производной можно опустить:

$$S(E) = \frac{E^2}{8\pi}\frac{\partial \varepsilon(\theta)}{\partial \theta}$$

$$S(D) = \frac{D^2}{8\pi}\frac{\partial \left(\frac{1}{\varepsilon(\theta)}\right)}{\partial \theta}$$

Тогда получаем ответикусы:

$$C_E = \theta\left(\frac{\partial S(E)}{\partial \theta}\right)_E = \theta\,\frac{E^2}{8\pi}\frac{\partial^2 \varepsilon(\theta)}{\partial \theta^2}$$

$$C_D = \theta\left(\frac{\partial S(D)}{\partial \theta}\right)_D = \theta\,\frac{D^2}{8\pi}\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{\varepsilon(\theta)}\right)}{\partial \theta^2}$$